



429

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告
非線性控制理論與模擬－(子計畫四)
非線性系統中混沌的抑制與產生(III)
Suppression and Generation of Chaos in Nonlinear Systems

計畫編號: NSC 88-2115-M-019-002

執行期限: 87/8/1 - 88/7/31

主持人: 鄭智湧 海洋大學電機系

Abstract

本計劃的主要目的，在於應用控制器的設計來改變非線性系統的特性，其中控制的任務區分為兩個方向，混沌的消除和混沌的產生。混沌的消除屬於局部控制器的應用，而混沌的產生則需要全域的考量與設計。

The main theme of this proposal is to alter the dynamics of nonlinear systems via controller design. According to our needs, the control objectives are either to suppress chaos or to generate chaos. The task of suppression can indeed be performed by local linear controllers, but generation of chaos needs global consideration and efforts of nonlinear controllers.

1 Introduction

自1963年，Lorenz從簡化的大氣模型中發現了奇異吸子，而開啓了研究混沌的熱潮。然而即使到目前為止，對於什麼是“混沌”仍無一確切的定義，不過，對於給予一非週期性的決定性系統，其長時期的動態結果敏感依賴於初始條件，而展現不可預測的行為，如此便可稱之為混沌。

系統中的混沌可能造成災難性的結果，在此狀況下能對於混沌現象加以控制，便成爲一必要的課題。混沌控制濫觴於1990年E. Ott, C. Grebogi以及J. A. Yorke等三人所提出的OGY控制法，藉由混沌吸子原本就存在無數不穩定的週期軌道，施加外力以擾動系統參數使軌跡能穩定於所選擇的軌道中，並由W. L. Ditto和M. L. Spano等人在實際系統中獲得證實，成功的將混沌系統控制在平衡點以及週期爲二的情形中。另外在生物

科技應用方面，醫學界亦可對心臟跳動的混沌加以控制，以防止心肌突發的顫震等。

但在許多的狀況下，混沌的存在卻有其必要性。對於這個非線性的世界，秩序中夾雜著混亂，而混亂中也隱藏著秩序，而混沌便是連接這些秩序與多樣性共存的一個關鍵。一般而言，早期混沌控制的概念，傾向於將系統中混沌的信號加以抑制或消除，使其成爲一般普通的動態系統。但隨著許多研究的發現，有時混沌的存在反而利於系統運作，因此研究如何利用非線性系統產生混沌，也漸引起廣泛的注意。除此之外，混沌亦被應用到通訊與訊號處理中，利用同步化的方法，使得原訊號經由混沌加密後得以在接收端重現原貌，使秘密訊號的傳遞獲得保障，因此，混沌信號的產生和其實用性也更加爲人所注意。

因此，在科學和工程的應用上，混沌信號的抑制與產生，有著同等的重要性。如何將一非線性動態系統，依照我們實際的需求，經由控制來改變(抑制與產生混沌)其特性，將是一非常值得研究的方向。

2 Suppression of Chaos

混沌控制的觀念始於OGY [1]的方法，此方法隨後又由[2, 3]在實驗中驗證其可行性。

2.1 LQ or H^∞ design

在前一年度的研究計畫中，我們利用了現代控制理論中的LQ及 H^∞ 設計，達到消除混沌，並加強控制器對雜訊的強韌性的效果。在此因篇幅有限，不再詳述。

2.2 Identification and suppression

事實上，之前所述的控制器設計，可以進一步的由所觀察或量測的混沌時序訊號開始設計。考慮一個混沌系統：

$$x_{k+1} = f(x_k, p); x_0$$

實驗 1：當我們未加入擾動時 $p = 0$ ，可得到一組系統的時序資料 x_1, x_2, x_3, \dots 。

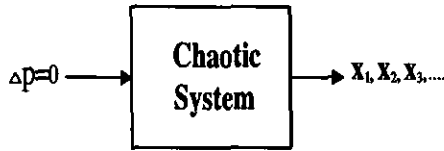


Figure 1: 未加擾動

實驗 2：當我們加入些微的擾動量 p 時，可得到另一組系統的時序資料 y_1, y_2, y_3, \dots 。

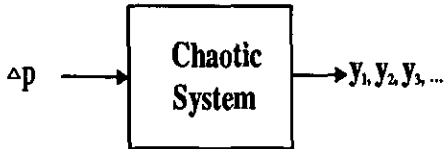


Figure 2: 加入擾動

由實驗 1 中我們可以經由系統判別求出未加擾動時系統的平衡點 x_f ，及其附近的線性化模型

$$(x_{n+1} - x_f) = A(x_n - x_f)$$

由實驗 2 中，我們可以求出加入微擾動 p 後之平衡點 y_f ，及其附近的線性化模型

$$(y_{n+1} - y_f) = A(y_n - y_f) + Bp$$

我們知道求出兩個平衡點後，可以得到 g 為

$$g = \left. \frac{\partial x_f}{\partial p} \right|_{p=0} = (I - A)^{-1} B$$

所以

$$B = (I - A)g$$

由狀態回授的控制器架構，我們令控制輸入為 $p = -K(x_n - x_f)$ ，則可得到方程式

$$(x_{n+1} - x_f) = (A - BK)(x_n - x_f)$$

再利用 LQ 或 H^∞ 設計的方法，我們就可以求出穩定控制器。如 Figure 3 為一利用 Henon map 所產生的時序訊號，進而設計控制器以達到混沌抑制的目的。

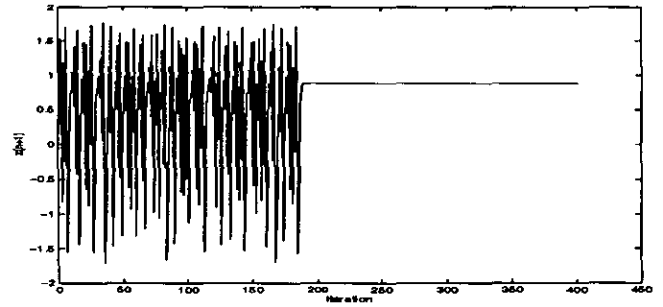


Figure 3: 混沌控制成穩定

3 Generation of Chaos

3.1 Motivation

首先回憶在 [10] 中所提到的 Shil'nikov 定理，其觀念為考慮一個三維的動態系統：

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x), t \in R, x \in R^3$$

其中向量場 $\xi: R^3 \rightarrow R^3$ 是 p 次可微分且連續 ($p \geq 1$)。假設在平衡點 x_e 上的 Jacobian 矩陣其特徵值為下列形式

$$\gamma, \sigma \pm j\omega, \sigma\gamma < 0, \omega \neq 0$$

其中 γ, σ 和 ω 是實數，對應於共軛複數特徵值 $\sigma \pm j\omega$ 的平衡點是一個二維的特徵平面 $E^c(x_e)$ ，實數特徵值 γ 則對應於一維的特徵線 $E^r(x_e)$ ，而 σ 與 γ 的正負決定 $E^c(x_e)$ 及 $E^r(x_e)$ 上的動態是處於穩定或不穩定的狀態。

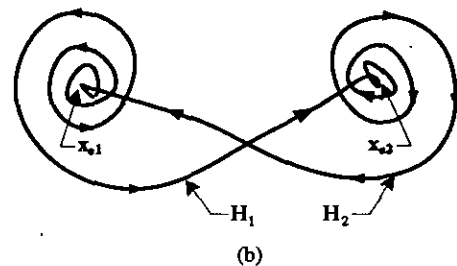
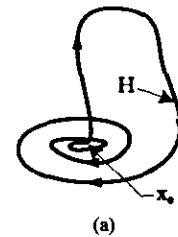


Figure 4: 鞍點動態圖 (a) $\gamma > 0$, (b) $\gamma < 0$

由 Figure 4 我們得知(a)所示為一鞍點，軌跡從鞍點附近遠離，但是經過一段時間後又會逐漸的接近鞍點，而(b)則是有兩個鞍點相連接，軌跡從左邊鞍點附近逐漸向外遠離，但是並不會發散而是被吸引到右邊鞍點附近，然後在靠近某一定距離時又逐漸的往外遠離，最後又會回到左邊的鞍點附近，如此週而復始就形成了混沌的軌跡，文獻上的 Rössler 吸子為圖 Figure 4(a) 的著名實例，而 Lorenz 吸子、Chua 吸子則是 Figure 4(b) 著名的例子。



Figure 5: Rössler, Lorenz, 及 Chua's 吸子

由此我們可以得知，何以混沌系統同時有著延展與折疊的現象，並以這種特性可以得到典型的混沌動態具備下列三項特性：

1. 可計數的無限個包含各種週期的週期軌道
2. 不可計數的無限非週期軌道
3. 軌道相當的密集

3.2 Stretch and folding design

給予一有限維度的非線性系統

$$x_{n+1} = f(x_n); \quad x_0 \text{ given}$$

延續先前的架構下可以發現，混沌的消除比產生來的容易，因為只需在局部施以微量的控制，而混沌則是在全域中消失。但若要使系統產生混沌，則必須要有全域的控制，以使系統達到一種介於穩定與不穩定間的動態平衡。

因此由平衡點附近局部(local)的線性化中會發現，其中軌跡在有些方向發散，在有些方向收斂，而特徵值在單位圓的內外則為其做伸展或折合的主因。而以全域(global)的觀點會發現，巨觀而言奇異吸子又是屬於耗散性(dissipative)之系統，因此如何能夠維持一種介於穩定與不穩定間的動態平衡，便是連接這些微觀與巨觀的關鍵。因此我們若能夠利用現有的線性及非線性控制的理論，做線性局部控制器或非線性全域控制器的

設計，藉以改變特徵值，我們即可自系統中產生混沌之信號。

假設從一周期為 p 之系統出發，我們知道 $f^p(x)$ 線性化之特徵值皆為穩定(在單位圓內)，因此為了製造伸展或發散方向以產生混沌，我們必須改變系統在局部位置的特徵值，使其位於單位圓外，才能使系統產生混沌的誘因。類似於 OGY 法精神的地方在於，依據來自於混沌吸子中原本就具有的密集且不穩定的週期軌道，經由微擾動的參數設定，來穩定原有的軌跡，或者將已穩定軌跡推向不穩定的軌道(原始的 OGY 法是將不穩定的軌跡推向穩定的方向)。但本報告的方法，不需倚賴既有的穩定或不穩定的流形，而可以利用狀態回授創造適合的伸展方向。

Example 考慮系統

$$\begin{cases} x(n+1) = a - x^2(n) + by(n) \\ y(n+1) = x(n) \end{cases}$$

- 當 $a = 0.8, b = 0.3$ 時，一穩定週期二的解如下所示：

$$\begin{bmatrix} x_{f1} \\ y_{f1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0076 \\ -0.3076 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{f2} \\ y_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3076 \\ 1.0076 \end{bmatrix}$$

- 求取上述的兩個點的線性化模式

$$Z_i(n+1) = A_i Z_i(n) + B_i u(n)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.9400 & 0.1846 \\ -2.0153 & 0.3000 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1.6153 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.9400 & -0.6046 \\ 0.6153 & 0.3000 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1.0153 \\ 1 \end{bmatrix}$$

且其相對應的特徵值為

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4313 \\ -0.2086 \end{bmatrix}$$

利用上述的法則設計回授增益

$$K_1 = [0.5640 \quad -0.1423]$$

$$K_2 = [-4.0750 \quad -3.3686]$$

將 $\lambda_{11}, \lambda_{21}$ 放置於 $\lambda'_{11} = \lambda'_{21} = -1.2$ 來獲得局部伸展的方向。最後結果如 Figure 6 所示。

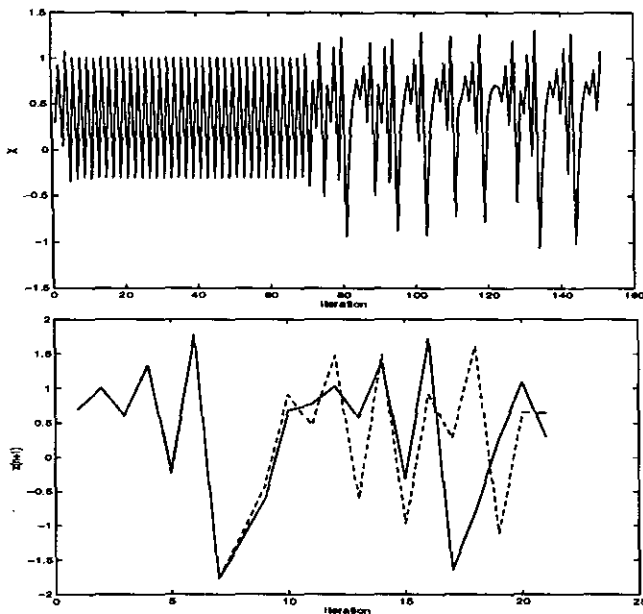


Figure 6: 混沌軌跡的產生與對初始值的敏感

4 Conclusion

在混沌的抑制方面，我們可以由混沌時序訊號加以處理而將混沌的現象消除。其中包括利用系統判別的方法，得到狀態空間平衡點的局部模式，再配合先前所發展的控制法則，將混沌消除。

在混沌的產生方面，在本篇論文裡我們利用週期軌跡的特性，再施以微量的狀態回授控制，來達成混沌的結果。相較於在[9]中提到的全域控制，我們所使用的微量控制可以克服[9]中可能施以過量輸入導致軌跡發散的情形。

References

- [1] E. Ott, C. Grebogi and A. Yorke, "Controlling chaos," *Physical Review Letters*, Vol. 64, No. 11, 1196-1199, 1990.
- [2] W. L. Ditto, S. N. Rauseo and M. L. Spano, "Experimental control of chaos," *Physical Review Letters*, Vol. 65, No. 26, pp. 3211-3214, 1990.
- [3] U. Dressler and G. Nitsche, "Controlling chaos using time delay coordinates," *Physical Review Letters*, Vol. 68, No. 1, pp. 1-4, 1992.
- [4] M. J. Ogorzalek, "Taming chaos — part I: Synchronization," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 40, pp. 693-699, 1993.
- [5] M. J. Ogorzalek, "Taming chaos — part II: Control," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 40, pp. 700-706, 1993.
- [6] A. A. Hammad, E. A. Jonckheere, C.-Y. Cheng, and C.-C. Chien, "Stabilization of chaotic dynamics: A modern control approach," *International Journal of Control*, pp. 663-677, 1996.
- [7] E. A. Jonckheere, A. A. Hammad, C.-Y. Cheng and C.-C. Chien, "Linear quadratic control of chaos," *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 174-179, 1994.
- [8] G. Chen, "Control and synchronization of chaotic systems," ECE Dept., University of Houston, 1995.
- [9] G. Chen and D. Lai, "Anticontrol of Chaos via Feedback," *IEEE Conference on Decision & Control*, pp. 367-372, December 1997.
- [10] C. P. Silva, "Shil'nikov's Theorem—A Tutorial," *IEEE Transactions on Circuits and Systems: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 40, No. 10, pp. 675-682, October 1993.
- [11] M. P. Kennedy, "Three Steps to Chaos — Part I: Evolution," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, pp. 640-656, 1993.
- [12] M. P. Kennedy, "Three Steps to Chaos — Part II: A Chua's Circuit Primer," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, pp. 657-674, 1993.