

國立臺灣海洋大學 101 學年度研究所碩士班暨碩士在職專班入學考試試題

考試科目：工程數學

系所名稱：系統工程暨造船學系碩士班不分組

1. 答案以橫式由左至右書寫。2. 請依題號順序作答。

1. 本題是有關矩陣的問題。

(1) (05%) 若 A 為一 5×5 的方陣，且其行列式之值為 3，試求方陣 $(-2A)$ 的行列式。

(2) (05%) 若 B 為一 4×4 的方陣，且其特徵多項式為 $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+1)$ ，

則 B 的反矩陣是否存在？為什麼？

2. (10%) 對於聯立方程組

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= b_1 \\-3x_1 + 3x_2 + ax_3 &= b_2 \\5x_1 - 3x_2 - 8x_3 &= b_3\end{aligned}$$

若此方程組無解，試決定常數 a 、 b_1 、 b_2 與 b_3 所必須滿足的關係或條件。

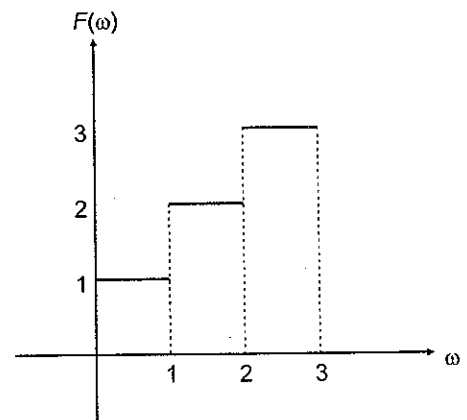
3. 假設函數 $f(x)$ 的傅立葉變換

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad i = \sqrt{-1}$$

如右圖所示，請畫出以下各個函數 Fourier 變換的圖形（座標值務必標出適當的數值，否則不予計分）。

(1) (07%) $f(2x)$ 。

(2) (08%) $f''(x)$ 。



4. 已知函數 $\phi(x, y, z) = 2xy + z^2$ 。

(1) (05%) 若向量 \mathbf{u} 為函數 ϕ 的梯度 (gradient)，試求 $\mathbf{u}(1, -1, 3)$ 。

(2) (05%) 試求函數 ϕ 在點 $(1, -1, 3)$ 處、方向 $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 上的方向導數。

(3) (05%) 試求函數 \mathbf{u} 在點 $(1, -1, 3)$ 處之散度 (divergence)。

(4) (10%) 試求函數 \mathbf{u} 沿著曲線 $L: \{(x, y, z) \mid x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ 的線積分 (line integral)。

5. (20%) 試建立以下問題（患者血液中的藥物劑量）的數學方程式、並求解之。從時間 $t = 0$ 開始，醫護人員將藥物以 A g/min 的劑量注入患者的血液中，而在任意時間 t 時，人體細胞同時以當時血液中藥物總劑量的固定比例 α 吸收 ($\alpha < 1$)。

6. 若 $\frac{1}{2}t \sin 2t$ 為微分方程式 $m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 4 \cos 2t$ 的一個解，其中 m 、 c 和 k 均為常數、 $y = y(t)$ 。

(1) (05%) 試求出 $m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 8 \cos 2t$ 的一個解。

(2) (15%) 試決定 m 、 c 和 k 之值。