

利用等位函數法模擬 2D 黏性駐波

梁興杰¹ 林家賢² 林慶緯³

摘要

本研究中，我們發展一數值模式，利用不可壓縮奈威爾-史托克方程式與介面運動方程式，以求解自由液面流場；將自由液面流轉換為固定計算網格之二相流系統，氣相與液相以等位函數之「正」、「負」符號區分，零等位函數表示自由液面，氣相與液相之密度與黏滯係數以平滑之等位函數描述之。氣相與液相之流場統一以壓力校正法 SIMPLE 求解；介面運動以等位函數法捕捉。我們將本模式應用於模擬 2D 黏性駐波，以雷諾數 $Re = 20$ 與 200 為算例，並與線性解(Wu, et al., 2001) 做比較。此外，我們探討 $Re = 200$ 時，不同氣相與液相密度比與黏滯係數比對自由液面流場，與質量守恆誤差之影響。

關鍵字：壓力校正法、等位函數法、黏性駐波

Numerical Study of Two-Dimensional Viscous Standing Wave using Level Set Method

Shin-Jye Liang¹ Jia-Sian Lin² Cing-Wei Lin³

ABSTRACT

A two-dimensional numerical algorithm that couples the incompressible Navier-Stokes equations with the Hamilton-Jacobi equation for free-surface flows was developed. The free surface flow is converted into a two-phase flow system on a fixed grid in which the free surface is implicitly expressed by the zero level set function. Pressure correction method based SIMPLE was used to solve the two-phase flow field. Level set method was employed to capture the evolution of interface. The developed model was applied to simulate 2D viscosity standing waves. The effect of density ratio and viscosity of air and liquid on the free surface flows were investigated. Computed results agreed well with the linear solution which considers the interaction of free surface and viscosity (Wu, et al., 2001).

Key Words : Pressure correction method, Level Set Method, standing wave

一、緒論

自由液面流與二相流之數值研究在過去二、三十年，一直是計算流力之重要研究主題之一。常見的數值方法有標記網格法(Marker and Cell, MAC) (Harlow and Welch, 1965)，任意拉格朗日-尤拉系統

法(Arbitrary Lagrangian - Eulerian Method, ALE) (Hirt, et al., 1974)，流體體積法 (Volume of Fluid, VoF) (Hirt and Nichols, 1979)與等位函數法(Level Set Method, LSM) (Sussman, et al., 1994； Sussman and Fatemi, 1999; Yue, et al., 2001；鍾孟軒，2002；林家賢，2004)。

本研究中，我們採用壓力校正法 SIMPLE 結合等位函數法，以模擬 2D 黏性駐波，計算之結果並

¹ 逢甲大學水利工程學系副教授

² 逢甲大學水利工程學系碩士生

³ 逢甲大學水利工程學系大學生

與 Wu, et al. (2001)之線性解比較。此外，我們探討 $Re=200$ 時，不同氣相與液相密度黏滯係數 ($\mu_a/\mu_l = 0.4429/44.29$ 、 $4.429/44.29$ 、與 $44.29/44.29$)對自由液面流流場之影響，以及質量守恆誤差之比較。

二、控制方程式

描述二相流/自由液面流之控制方程式如下 (Sussman, et al., 1994):

動量方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \frac{\partial P}{\partial y} + \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho(\phi)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(\phi) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(\phi) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \frac{\partial P}{\partial x} + \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho(\phi)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(\phi) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(\phi) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + g_y$$

連續方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

等位函數方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u\phi}{\partial x} + \frac{\partial v\phi}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

重距方程式

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} = \text{sign}(\phi)(1 - |\nabla \phi|) \quad (5)$$

其中 t 為時間， u 與 v 分別為 x 與 y 方向之速度， $\rho(\phi)$ 為密度， $\mu(\phi)$ 為黏滯性， ϕ 為等位函數， d 為距離函數， τ 為虛擬時間階步(一般取 $\tau = \Delta h / 2$)， Δh 為最小網格尺度， $\text{sign}(\phi)$ 為一平滑符號函數。

$$\text{sign}(\phi) \equiv \begin{cases} -1 & \text{if } \phi < 0 \\ 0 & \text{if } \phi = 0 \\ 1 & \text{if } \phi > 0 \end{cases} \quad (6)$$

三、等位函數法

等位函數 (Level Set Function)， $\phi(\mathbf{x})$ ，為一距離函

數(Distance Function)， $d(\mathbf{x})$ 。以空氣與水為例，假設空氣與水之交介面處定義為 $\phi(\mathbf{x}) = 0$ ，又稱之為零等位函數 ϕ_0 。

$$\Gamma = \{ \mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \} \quad (7)$$

在水的區域內表示為 $\phi(\mathbf{x}) > 0$ ，在空氣區域內表示為 $\phi(\mathbf{x}) < 0$ ，且 $\phi(\mathbf{x})$ 值的大小表示為空間中任一點到介面處之垂直距離，如下式表示：

$$\phi(\mathbf{x}, t) \begin{cases} > 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \text{water} \\ = 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Gamma \\ < 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \text{gas} \end{cases} \quad (8)$$

描述介面運動方程式，即 Hamilton-Jacobi 方程式，或稱時變-對流方程式，如式(4)所示。

本文參考 Sussman, et al., (1994) 與 Sussman and Fatem (1999) 所提出的方法，求解自由液面流問題。將兩種不同相態之介質統一用奈威爾-史托克(Navier-Stokes)方程式描述其運動，以等位函數法捕捉介面的位置，介面兩側二相流體分別採用各自的密度與黏滯係數，以平滑之等位函數 (Sussman, et al., 1994) 表示：

$$\rho_\varepsilon(\phi) = \lambda + (1 - \lambda)H_\varepsilon(\phi) \quad (9)$$

$$\mu_\varepsilon(\phi) = \eta + (1 - \eta)H_\varepsilon(\phi) \quad (10)$$

式中 $\lambda = \rho_a / \rho_l$ 、 $\eta = \mu_a / \mu_l$ ，其中 $H_\varepsilon(\phi)$ 為

1D Heaviside 函數

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right] & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon \\ 1 & \text{if } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (11)$$

對應之導數 $\delta_\varepsilon(\phi)$ 為平滑之 Delta 函數

$$\delta_\varepsilon(\phi) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right] & \text{if } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

式中 ε 為一參數，用以控制 Heaviside 函數之平滑度。其物理意義為將原為極小厚度之介面，擴展成厚度為 2ε 之帶狀區。本文計算時採 $\varepsilon = \alpha\Delta h$ ， α 為界面厚度參數，通常取 1.5~3.0 (Sussman, et al., 1994; Yue, et al., 2003 等)。

假如， $t = t^n$ 時，空氣與水的交界面為零等位集合，即 $\phi(\mathbf{x}, t^n) = 0$ 。當水體隨流速移動時，零等位集

合(即空氣和水的交界面)也會被帶動,此零等位集合即是我們欲追蹤的邊界輪廓。所以,可以對等位函數作各種數值運算,最後所解出的 $\phi(\mathbf{x}, t^{n+1}) = 0$ 值,即為水體移動後下一時刻之邊界輪廓。

本研究結合壓力校正法 SIMPLE 與等位函數法,所建立求解自由液面流之模式。其計算步驟如下所示:

STEP 1: 在 $t = t^n$ 時,流場內速度 \mathbf{u}^n 、壓力 p^n 與等位函數 ϕ^n 值為已知。先將等位函數 $\phi(t^n)$ 值作初始值,流場密度 $\rho(\phi^n)$ 與黏性係數 $\mu(\phi^n)$,以平滑等位函數決定之。

STEP 2: 利用壓力校正法 SIMPLE, 求解流場 $t = t^{n+1}$ 時之壓力 p^{n+1} 與速度 \mathbf{u}^{n+1} 值,再將解出之速度 \mathbf{u}^{n+1} 代入等位函數方程式,求解 ϕ^{n+1} 。

STEP 3: 至此已完成一個時步的計算, $\phi^{n+1} = 0$ 即為零位面,也就是新的介面位置。

STEP 4: 更新新值 $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n+1}$ 、 $\phi^n = \phi^{n+1}$ 重複以上步驟 2~3,直到 $t^n = NT$ 時(終止時間 NT)。

四、2D 黏性駐波

我們以 2D 黏性駐波驗證模式,探討不同密度比(ρ_a / ρ_l)與黏滯係數比(μ_a / μ_l)對於自由液面流,以及質量守恒誤差之影響。

圖 1 為 2D 黏性駐波示意圖:水槽長 $Lx = 4$ 、高 $Ly = 4$,靜止水深 $d = 2$,初始波動振幅 $a = 0.05$ ($a/d = 0.025$),靜止水面與水位之垂直距離為 η ,假設起始條件為:

$$\eta(x) = a \times \cos\left[\frac{2\pi}{Lx}(x + Lx/2)\right] \quad (13)$$

相關之參數有無因次時間 $\tau = t\sqrt{g/d}$ 、波高 $\zeta = \eta/a$,雷諾數 $Re = d\sqrt{gd}/\nu$ 。

考慮 $Re = 20$ 與 200 (μ_a / μ_l 保持 $1/100$),計算使用網格為 81×81 均勻網格, $\Delta t = 0.01$ 其他使用參數如附表 1。

表 1 2D 黏性駐波所使用之參數

	ρ_a / ρ_l	μ_a / μ_l	a/d	Re
例一	1/1000	4.429/442.9	0.05/2	20
例二	1/1000	0.4429/44.29	0.05/2	200

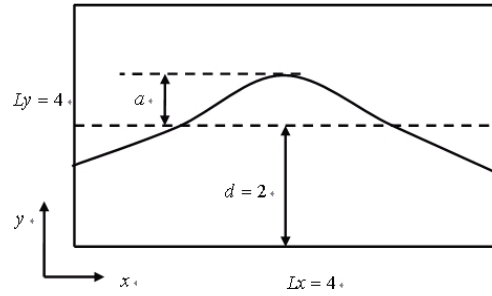
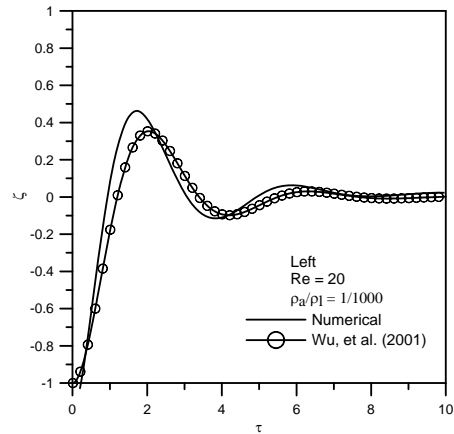
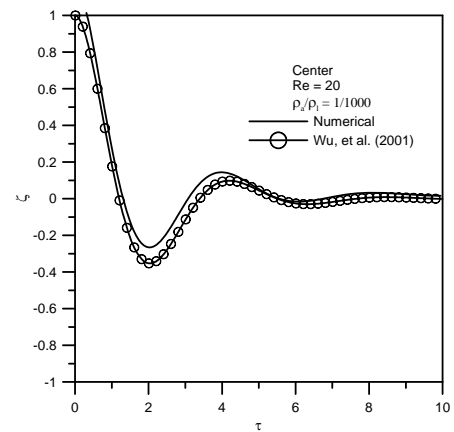


圖 1 2D 黏性駐波示意圖

圖 2 與圖 3 分別為 $Re = 20$ 與 200 之(a)左邊($x = 0$)與(b)中間($x = Lx/2$)水位變化與線性解(Wu, et al., 2001)比較圖。結果顯示,雷諾數愈小(黏滯係數較大),液相之水位振盪較小,愈快趨於靜止;雷諾數愈大(黏滯係數較小),液相之水位振盪較大,愈慢趨於靜止。

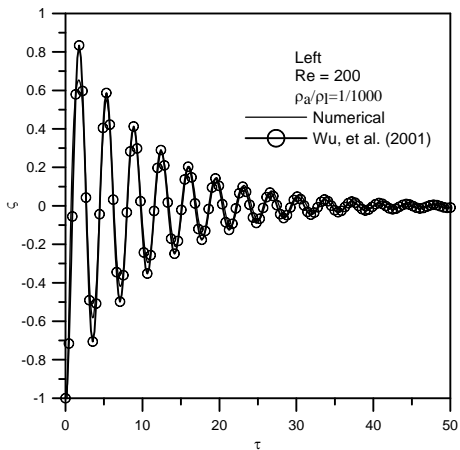


(a) 左邊($x = 0$)水位變化圖

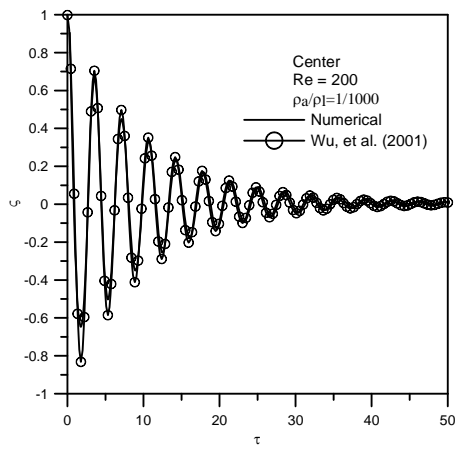


(b) 中間($x = Lx/2$)水位變化圖

圖 2 (a)左邊($x = 0$)與(b)中間($x = Lx/2$)水位與線性解比較圖($Re = 20$)



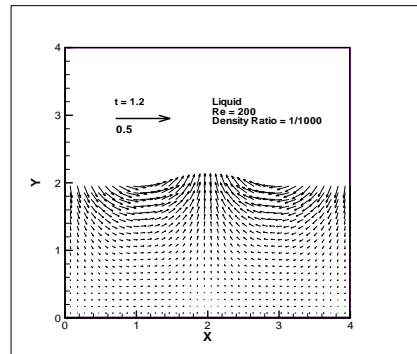
(a) 左邊($x=0$)水位變化圖



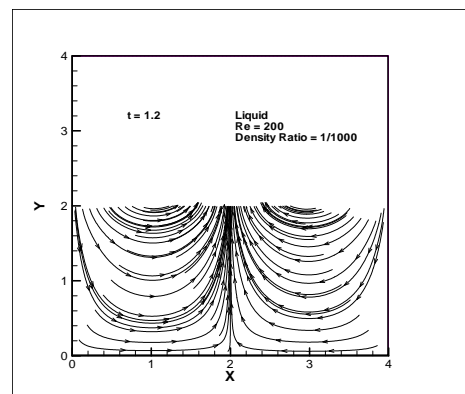
(b) 中間 ($x=Lx/2$) 水位變化圖

圖3 (a)左邊 ($x=0$) 與(b)中間 ($x=Lx/2$) 水位與線性解比較圖 ($Re=200$)

圖4與圖5分別為 $t=1.2$ ($\tau=2.7$) 與 $t=2.0$ ($\tau=4.4$) 時液相之流場結構圖。圖4(a)為速度向量圖，左邊速度往下，中間速度往上，剛好成 180° 相差，符合駐波之運動；(b)為流線圖，左右各一對稱旋渦，左邊為逆時針，右邊為順時針。圖4與圖5流場變化相差約 $1/2$ 週期。圖5(a)為速度向量圖，左邊速度往上，中間速度往下，剛好成 180° 相差；(b)為流線圖，左右各一對稱旋渦，左邊為順時針，右邊為逆時針。

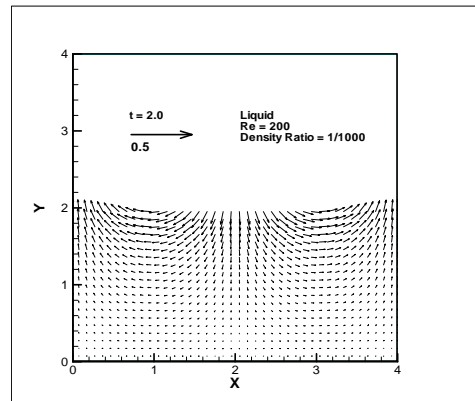


(a) 速度向量圖

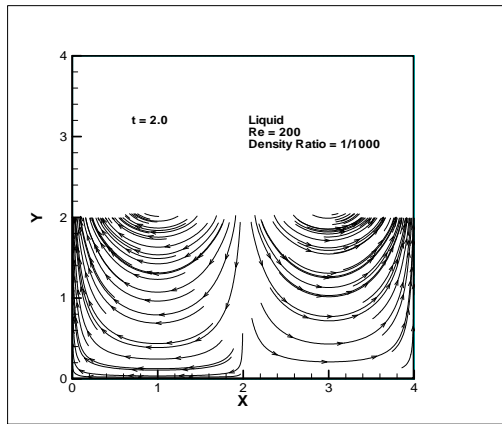


(b) 流線圖

圖4 $t=1.2$ ($\tau=2.7$) 時液相之流場結構圖($Re=200$)



(a) 速度向量圖



(b) 流線圖

圖 5 $t = 2.0$ ($\tau = 4.4$) 時液相之流場結構圖 ($Re = 200$)

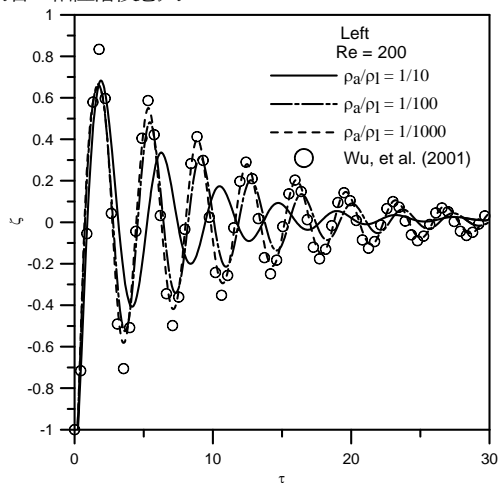
以下探討 $Re = 200$ ，不同密度比 (ρ_a / ρ_l) 與黏滯係數比 (μ_a / μ_l)，對於流場與質量守恆誤差之影響。

表 2 為 $Re = 200$ ，不同密度比 (ρ_a / ρ_l 分別為 1/10、1/100 與 1/1000) 之算例所使用之參數。

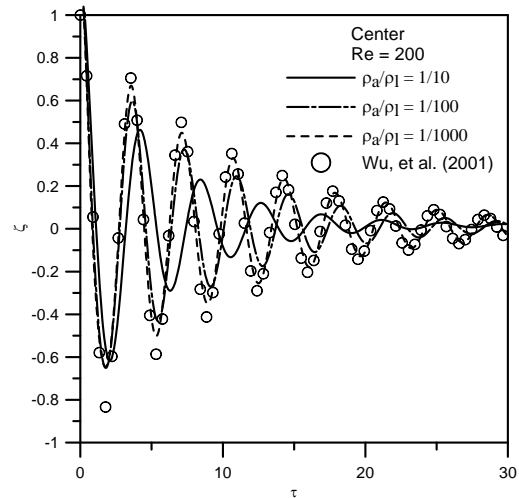
表 2 2D 黏性駐波不同密度比之參數表

	ρ_a / ρ_l	μ_a / μ_l	a / d	Re
例一	1/10	0.4429/0.4429	0.05/2	200
例二	1/100	0.4429/4.429	0.05/2	200
例三	1/1000	0.4429/44.29	0.05/2	200

圖 6 為計算所得(a)左邊 ($x = 0$) 與(b)中間 ($x = Lx / 2$) 水位變化與線性解比較圖。結果顯示， ρ_a / ρ_l 愈小，水位震盪愈大，衰減越慢； ρ_a / ρ_l 愈大，水位震盪愈小，衰減越快。不同 ρ_a / ρ_l 之水位變化有相差， ρ_a / ρ_l 愈大者，相位落後愈大。



(a) 左邊 ($x = 0$) 水位變化圖



(b) 中間 ($x = Lx / 2$) 水位變化圖

圖 6 $Re = 200$ 不同密度比(a)左邊 ($x = 0$) 與(b)中間 ($x = Lx / 2$) 水位與線性解比較圖 ($Re = 200$)

表 3 為 $Re = 200$ ，不同黏滯係數比(0.4429/44.29、4.429/44.29、44.29)算例所使用之參數。

表 3 為 2D 黏性駐波不同黏滯係數比之參數表

	ρ_a / ρ_l	μ_a / μ_l	a / d	Re
例一	1/1000	0.4429/44.29	0.05/2	200
例二	1/1000	4.429/44.29	0.05/2	200
例三	1/1000	44.29/44.29	0.05/2	200

圖 7 為計算所得(a)左邊 ($x = 0$) 與(b)中間 ($x = Lx / 2$) 水位變化與線性解比較圖。結果顯示， μ_a / μ_l 愈小 (氣相之黏滯性影響愈小)，水位震盪較大，數值解愈接近解析解； μ_a / μ_l 愈大 (氣相之黏滯性影響愈大)，水位震盪愈小。不同 μ_a / μ_l 之水位變化也有相差， μ_a / μ_l 愈大者，相差落後愈大。

本計算以上述 $Re = 200$ 為例，比較不同密度比 (ρ_a / ρ_l) 與黏滯係數比 (μ_a / μ_l) 之質量守恆誤差。

我們定義 $Error(t)$ 為 t 時之相對質量誤差， $sError(t)$ 為 t 時之累積質量誤差，與 $aError(t)$ 為 t 時之時間平均質量誤差：

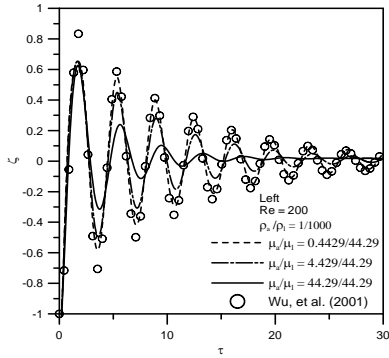
$$Error(t) = |M(t) - M(0)| / M(0) \quad (14)$$

$$sError(t) = \int_0^t Error(t) dt \quad (15)$$

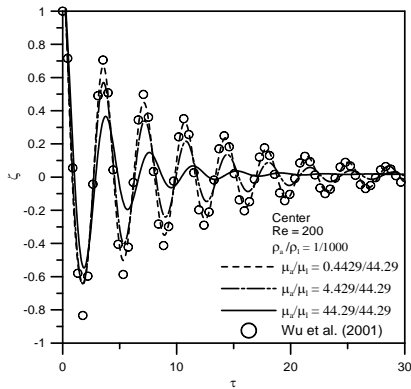
$$aError(t) = \int_0^t Error(t) / t \quad (16)$$

其中：初始質量 $M(0) = \int_{\Omega} \rho(x, y, 0) dx dy$ 與 t 時之

$$\text{質量 } M(t) = \int_{\Omega} \rho(x, y, t) dx dy$$



(a) 左邊 ($x=0$) 水位變化圖



(b) 中間 ($x=Lx/2$) 水位變化圖

圖 7 不同黏滯係數比之(a)左邊 ($x=0$) 與(b)中間 ($x=Lx/2$) 水位與線性解比較圖 ($Re=200$)

圖 8 為 $Re=200$ ，不同 ρ_a / ρ_l 之時間平均質量誤差比較圖。結果顯示， ρ_a / ρ_l 較小者，其時間平均質量誤差較大； ρ_a / ρ_l 較大者，其時間平均質量誤差較小。原因是 ρ_a / ρ_l 愈小時，數值解愈趨困難，造成誤差愈大。

圖 9 為 $Re=200$ ，不同 μ_a / μ_l 之時間平均質量誤差比較圖。結果顯示， μ_a / μ_l 較小，其時間平均質量誤差較大； μ_a / μ_l 較大，其時間平均質量誤差較小。其原因如前述， μ_a / μ_l 愈小時，數值解愈趨困難，誤差愈大。

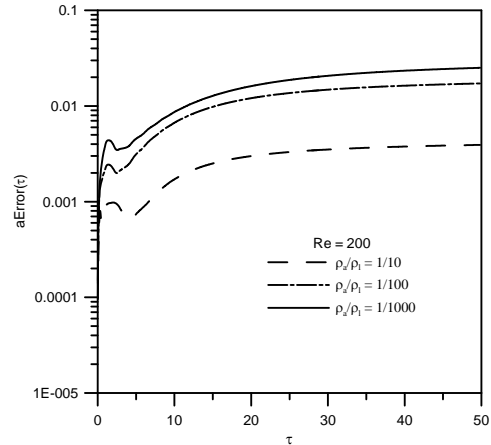


圖 8 不同密度比之時間平均質量誤差比較圖 ($Re=200$)

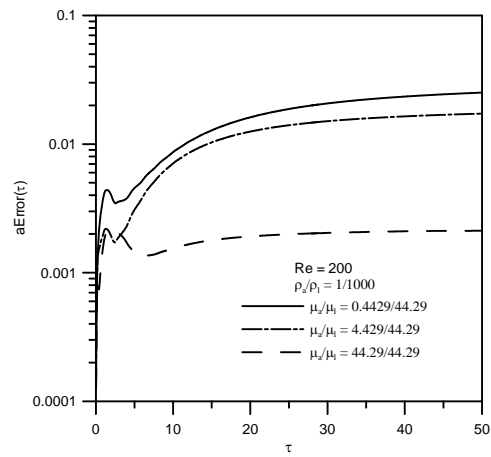


圖 9 不同黏滯係數比之時間平均質量誤差比較圖 ($Re=200$)

五、結果與討論

Wu et al., (2001)之 2D 黏性駐波線性解，僅考慮液相之流場，忽略氣相之影響，以及氣相與液相之交互作用。本研究中，我們以壓力校正法 SIMPLE 結合等位函數法，模擬 2D 黏性駐波，並考慮氣相與液相之密度比 (ρ_a / ρ_l) 與黏滯性比 (μ_a / μ_l) 對流場之影響。計算結果顯示，當 ρ_a / ρ_l 以及 μ_a / μ_l 很小時，氣相對液相流場之影響很小，數值解與 Wu et al., (2001) 之線性解相當吻合；而當 ρ_a / ρ_l 較大時，氣相之重力作用較明顯，水位震幅變得較小，且衰減較慢；同樣的，當 μ_a / μ_l 較小時，氣相之黏滯效應對液相流場之影響較小，數值解與 Wu et al., (2001) 之線性解相當吻合，而當 μ_a / μ_l 較大時，氣相之黏滯作用較明顯，水位震幅較小，且衰減較慢。此外，我們發現當 ρ_a / ρ_l 與 μ_a / μ_l 愈小時，數值誤

差與質量守恒誤差愈大。

本研究所發展之自由液面流模式，將來可應用於其他二相流，例如，水渦、氣泡、波浪等問題之研究。

參考文獻

1. 鍾孟軒 (2002) "自由液面之三維不可壓縮黏性流數值模式發展與應用(一)", 財團法人中興工程顧問社, 研發專案 (6082)期中報告。
2. 林家賢(2004)以 "等位函數法模擬2D自由液面流之數值研究", 逢甲大學, 水利工程學系, 碩士論文。
3. Sussman, Mark and Fatemi, Emad (1999) "An Efficient Interface-Preserving Level Set Re-distancing Algorithm and Its Application To Interfacial Incompressible Fluid Flow," SIAM, Journal on Scientific Computing, Vol. 20, pp. 1165-1191.
4. Sussman, Mark, Emad Fatemi, Peter Smereka and Stanley Osher (1998) "An improved Level Set Method for Incompressible Two-Phase Flows," Computers & Fluids, Vol. 27, pp. 663-680.
5. Sussman, Mark, Peter Smereka and Stanley Osher (1994) "A Level Set Approach for Computing Solution to Incompressible Two-Phase Flow," Journal of Computational Physics, Vol. 114, pp. 146-159.
6. Tome, M. F. and Sean Mckee (1994) "Gensmac: A Computational Marker and Cell Method for Free Surface Flows in General Domains," International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 110, 171-186.
7. Hirt, C. W. and B. D. Nichols (1979) "Volume of Fluid (VoF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," Journal of Computational Physics, Vol. 39, pp. 201-225.
8. Wu, G. X., Eatock R., Taylor and D. M. Greaves (2001) "The Effect of Viscosity on the Transient Free Surface Waves in a Two Dimensional Tank," Journal of Engineering Mathematics, Vol. 40, pp. 77-90.
9. Wang, Jr-Ping, A. G. L. Borthwick. and R. Eatock Taylor (2004) "Finite-Volume-Type VoF Method on Dynamically Adaptive Quadtree Grids," International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 45, pp. 485-508.
10. Yue, Wusi, Ching-Long Lin, and Virendra Patel (2003) "Numerical Simulation of Unsteady Multidimensional Free Surface Motion by Level Set Method," International Journal For Numerical Methods in Fluids, Vol. 42, pp. 853-884.